第 34 講　事象の考え方と確率

34　9 枚のカードに 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記してある．このカードの中から任意に 1 枚を抜き出し，その数字を記録し，もとのカードの中に戻すという操作を n 回繰り返す.

(1)　記録された数の積が 5 で割り切れる確率を求めよ.

(2)　記録された数の積が 10 で割り切れる確率を求めよ.

(3)　記録された数の積が 50 で割り切れる確率を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　事象の考え方と確率

34　9 枚のカードに 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記してある．このカードの中から任意に 1 枚を抜き出し，その数字を記録し，もとのカードの中に戻すという操作を n 回繰り返す．記録された数の積が 8 の倍数となる確率を求めよ．

【選択肢】

㋐　$1-\dfrac{(2n^2-13n+19)5^{n-1}}{9^n}$　　㋑　$1-\dfrac{(2n^2+13n-5)5^{n-1}}{9^n}$

㋒　$1-\dfrac{(2n^2+13n+25)5^{n-2}}{9^n}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　事象の考え方と確率

34　9 枚のカードに 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記してある．このカードの中から任意に 1 枚を抜き出し，その数字を記録し，もとのカードの中に戻すという操作を n 回繰り返す．

(1)　記録された数の積が 5 で割り切れる確率を求めよ．

(2)　記録された数の積が 10 で割り切れる確率を求めよ．

(3)　記録された数の積が 50 で割り切れる確率を求めよ．

【答】　(1) $\dfrac{9^n-8^n}{9^n}$　(2) $\dfrac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}$　(3) $\dfrac{9^n-(n+8)8^{n-1}-5^n+(n+4)4^{n-1}}{9^n}$

【解答】

(1)　n 回のうち 5 が 1 回も出ない事象の余事象であるから

$$1-\left(\frac{8}{9}\right)^n=\boldsymbol{\frac{9^n-8^n}{9^n}}$$

(2)　少なくとも偶数と 5 が 1 回ずつ入っていればよい．

偶数が 0 回の確率は $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n$，5 が 0 回の確率は $\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$，偶数も 5 も 0 回の確率は $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ となるので，偶数または 5 のどちらかが 1 回も出ない確率は $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n+\left(\dfrac{8}{9}\right)^n-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

よって $n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}&1-\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\\&=1-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n\\&=\frac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}\end{aligned}$$

$n=1$ のとき 10 の倍数とはならず確率は 0 であり，上記の確率は $n=1$ のとき 0 になるので，$n\geqq1$ について求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}}$$

である．

(3)　$50=2\cdot5^2$ より，偶数が少なくとも 1 回，5 は少なくとも 2 回入っていればよい．

(2)では，偶数と 5 が少なくとも 1 回入っている場合の確率を求めたので，5 が 1 回だけ出て偶数が少なくとも 1 回出る確率を求め，(2)の確率から引けばよい．

5 が 1 回だけ出る確率は ${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}$ であり，5 が 1 回だけ出て偶数が 1 回も出ない確率は ${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$ であるので，5 が 1 回だけ出て偶数が少なくとも 1 回出る確率は

${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}-{}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$ $(n\geqq2)$ となる．

よって求める確率は，$n\geqq3$ のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$1-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n-\left\{{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}-{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{9^n-(n+8)8^{n-1}-5^n+(n+4)4^{n-1}}{9^n}$$

$n=1$, 2 のとき 50 の倍数とはならず確率は 0 であり，上記の確率は $n=1$, 2 のとき 0 になるので，$n \geqq 1$ について求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{9^n-(n+8)8^{n-1}-5^n+(n+4)4^{n-1}}{9^n}}$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第34講　事象の考え方と確率

34　9枚のカードに1から9までの数字が1つずつ記してある．このカードの中から任意に1枚を抜き出し，その数字を記録し，もとのカードの中に戻すという操作を n 回繰り返す．記録された数の積が8の倍数となる確率を求めよ．

【選択肢】

㋐　$1-\dfrac{(2n^2-13n+19)5^{n-1}}{9^n}$　㋑　$1-\dfrac{(2n^2+13n-5)5^{n-1}}{9^n}$

㋒　$1-\dfrac{(2n^2+13n+25)5^{n-2}}{9^n}$

【答】　㋒

【解答】

まずは8の倍数にならないものを求める．

(Ⅰ)　積が奇数になる場合

すべてが奇数であればよいので，その確率は $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n$　……①

(Ⅱ)　積が4の倍数ではない偶数になる場合

2または6が1回だけ抜き出されて，残りすべてが奇数であればよい．2または6の取り出されるのは n 回のうち1回だけであるので，その確率は ${}_n\mathrm{C}_1\times\dfrac{2}{9}\times\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-1}$　……②

(Ⅲ)　積が8の倍数ではない4の倍数になる場合

・2または6が2回だけ抜き出されて，残りすべてが奇数である場合

2または6の取り出されるのは n 回のうち2回だけであるので，

その確率は ${}_n\mathrm{C}_2\times\left(\dfrac{2}{9}\right)^2\times\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-2}=\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}\times\left(\dfrac{2}{9}\right)^2\times\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-2}$　……③

・4が1回だけ抜き出されて，残りすべてが奇数である場合

(Ⅱ)の場合と同様に考えて，その確率は ${}_n\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{9}\times\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-1}$　……④

以上より，8の倍数にならない確率は

①＋②＋③＋④

$$=\left(\frac{5}{9}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\times\frac{2}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2\times\left(\frac{2}{9}\right)^2\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{(2n^2+13n+25)5^{n-2}}{9^n}\quad\cdots\cdots⑤$$

ここで，①については $n\geqq1$，②と④については $n-1\geqq1$ すなわち $n\geqq2$，③については $n-2\geqq1$ すなわち $n\geqq3$ のときに生じる確率であるが，②と④は $n=1$ のときにも成り立ち，③は $n=1$，2のときにも成り立つので，⑤は $n\geqq1$ について成り立つ．

以上より，求める確率は　1－⑤＝$\mathbf{1-\dfrac{(2n^2+13n+25)5^{n-2}}{9^n}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。